Elementary ideals, irreducible representations and Gluck twists on branched twist spins

著者	福田 瑞季
号	84
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第3174号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00125422

（別紙様式５）

論 文 内 容 要 旨

(NO. 1)

氏　　名	福田　瑞季	提出年	平成 31 年
学位論文の 題　　目	Elementary ideals, irreducible representations and Gluck twists on branched twist spins (初等イデアル、既約表現および Gluck twist を用いた branched twist spin の研究)		

本論文は 4 次元球面上の S^1-作用により得られる branched twist spin と呼ばれる 2 次元結び目についての研究をまとめたものである．

3 次元球面上の S^1-作用は Seifert らにより分類されており，そこから得られる結び目はトーラスリンクと呼ばれる．4 次元球面上の S^1-作用については，Montgomery と Yang により 4 つのクラス $\{D^3\}$, $\{S^3\}$, $\{S^3, m\}$, $\{(S^3, K), m, n\}$ に分類されることが知られている．これらは orbit data と呼ばれる．ここで D^3 および S^3 は S^1-作用による商空間を表し，m,n は例外軌道の位数を表す．例外軌道全体と固定点集合の和集合は S^4 の中で 2 つの 2 次元結び目の和集合となる．これらの 2 次元結び目のことを，それぞれ，branched twist spin と呼ぶ．Orbit data が $\{(S^3, K), m, n\}$ のとき，2 つの branched twist spin をそれぞれ $K^{m,n}$, $K^{n,m}$ と表す．

Branched twist spin は Pao, Hillman, Plotnick らにより，1970 年代から 90 年にかけて研究された．Branched twist spin は S^1-作用をもつことから，2 次元結び目補空間が S^1 上のファイバー束の構造をもつ，所謂ファイバー結び目であることがわかる．さらに，Plotnick により，2 次元ファイバー結び目が branched twist spin であることと，そのモノドロミー が周期的であることが同値であることが知られている．その意味で，branched twist spin は 3 次元球面内のトーラスリンクの 2 次元結び目版という位置づけにあり，2 次元結び目の研究を進める上で重要なクラスといえる．

2 次元結び目の研究では，2 次元結び目の分類が重要な研究課題となる．そのためには 結び目不変量を導入し，2 つの 2 次元結び目を区別する必要がある．Branched twist spin の特別なクラスである twist spun knot については，2 次元結び目図式の構成，2 次元結び目補空間の基本群の計算，デーン手術を応用した分類，カンドル不変量の具体例への適用など，さまざまな研究が進められている．一方で，branched twist spin はその難しさのため，あまり研究が進められていない．例えば，branched twist spin の結び目補空間の基本群の表示は Plotnick により与えられているが，基本群からの有用な不変量の構成は進められていない．

本論文では，第 4 章で branched twist spin の研究を進める際に，その定義を向き付けられた 2 次元結び目に拡張した．特に m と n は $(m, n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ に値をもつものとして定式化される．簡単のため，ここでは m,n は正の数であると仮定する．

第 5 章では branched twist spin の基本群の表示から，Fox 微分を使って初等イデアルを計算し，その特殊値を使って，2 つの branched twist spin を 区別するための十分条件を与えた．

第 6 章では，既約な SL(2, C)-metabelian 表現に着目し，研究を進めた結果をまとめている．結び目

理論においては，Lin により結び目に沿った分岐被覆空間の基本群の表示が与えられ，長郷氏と山口氏により，その metabelian 表現の研究が行われている. Branched twist spin $K^{m,n}$ のファイバー結び目としてのファイバー多様体は，例外軌道と固定点集合の和集合の像として得られる 3 次元球面内の結び目の m 重分岐被覆空間であることが知られており，長郷氏と山口氏の研究と関連付けられる．これらの研究を合わせることで，metabelian 表現について次の結果を得た.

定理 1 ([2]).　Branched twist spin $K^{m,n}$ の補空間の基本群の既約な $SL(2, \mathbb{C})$-metabelian 表現の数は

$$\begin{array}{ll} |\Delta_K(-1)-1|/2 & (m \text{ は偶数}), \\ 0 & (m \text{ は奇数}). \end{array}$$

ここで K は branched twist spin $K^{m,n}$ に例外軌道と固定点の像として得られる S^3 内の結び目であり，$\Delta_K(t)$ は K の Alexander 多項式を表す．この定理の系として以下のように，２つの branched twist spin が異なるための十分条件が得られる.

系 2 ([2]).　Branched twist spin K^{m_1,n_1}_1 と K^{m_2,n_2}_2 の例外集合と固定点の像として得られる 3 次元球面内の結び目をそれぞれ K_1 および K_2 とする.K^{m_1,n_1} と K^{m_2,n_2} が次のいずれかの条件を満たすとき，この 2 つの 2 次元結び目は同型ではない:

(1) m_1 と m_2 は偶数であり，$|\Delta_{K_1}(-1)| \neq |\Delta_{K_2}(-1)|$ が成り立つ.

(2) m_1 は偶数，m_2 は奇数であり，$|\Delta_{K_1}(-1)| \neq 1$ が成り立つ.

この系は論文 [1] で得た結果と一致し，metabelian 表現による別証明を与えている.

　第 7 章では branched twist spin による多様体の手術に着目し，得られた結果をまとめている．まず，Gordon による twist spun knot に沿った手術の branched twist spin への拡張を行った．3 次元球面から結び目の近傍を取り除き，そこに $D^2 \times S^1$ を貼り戻す操作をデーン手術とよび，複数の 3 次元多様体を結びつける重要な操作として研究が行われている．2 次元結び目の研究においては，2 次元結び目の近傍を取り除き，$D^2 \times S^2$ を貼り戻す操作が対応する．この操作のことを Gluck twist と呼ぶ．特に Gluck twist により 4 次元球面が再び 4 次元球面に戻るかという問題が有名な未解決問題として知られている．Branched twist spin の Gluck twist については，得られる 4 次元多様体が再び 4 次元球面になることが Pao により知られている．　Branched twist spin の Gluck twist について，次の結果を得た.

定理 3 ([3]). Branched twist spin $K^{m,n}$ の $K^{n,m}$ に沿った Gluck twist により得られる 2 次元結び目は $K^{m+n,n}$ である.

また、上述の Pao の結果については，彼の論文ではその操作が Gluck twist であるとは記されていなく，論文 [3] でその操作が Gluck twist であることが，別証明を与える形で言及されている．さらに上の定理の系として，Plotnick の示したモノドロミーと branched twist spin の同値性から次の結果が従う.

系 4 ([3]). m は偶数であり，かつ $K^{m,n}$ は非自明な 2 次元結び目とする．このとき，$K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ は同型ではないが，その補空間は同相である．

この系により，補空間の情報では区別できない 2 次元結び目の組が無限個存在することが分かる．そのような無限個の組の存在は，すでに Gordon により twist spun knot を 使って示されている．上の系は Gordon の結果を branched twist spin に拡張したものである．

参考文献

[1] M. Fukuda, Branched twist spins and knot determinants, Osaka Journal of Mathematics 54 (2017), no.4, 679-688.

[2] M. Fukuda, Irreducible SL(2,C)-metabelian representations of branched twist spins, to appear in Journal of Knot Theory and its Ramifications.

[3] M. Fukuda, Gluck twist along 2-knots with periodic monodromy, arxiv:1811.05109

（別紙様式５）

論　文　目　次

別　紙

論文審査の結果の要旨

n+2 次元球面内に埋め込まれた余次元 2 の球面は結び目の高次元化と位置づけられ n-knot と呼ばれている．特に 2-knot は低次元トポロジーにおいて通常の結び目に次いで研究されるべき対象であり，福田瑞季氏の学位論文における研究対象である．古くは Artin により spun knot と呼ばれる 2-knot が 1926 年に構成され研究されたが，その後 1965 年に Zeeman が Artin の構成を一般化した twist spun knot を，そして Litherland が 1979 年に deformed spun knot という，先の二つの例を含む広いクラスの 2-knot を構成した．福田氏の学位論文の第 3 章にこれら三つの 2-knot の構成がまとめられているが，福田氏の主要な研究対象は，twist spun knot を含み deformed spun knot の例となる，branched twist spin と呼ばれる 2-knot である．これらは Pao，Hillman，Plotnick らにより 1970 年代から 90 年ごろにかけて研究された 2-knot で，4 次元球面への円作用を用いて定義される．円作用の軌道空間が 3 次元球面となり，その中で例外軌道と不動点の像から 1-knot が定まる．そのため通常の結び目理論を応用することができ,2-knot の中でもまず最初に考察されるべきクラスと位置付けられる．しかしながら 1-knot のように図式を用いた研究が難しく Plotnick らの研究以降，ほとんど進展がなかった．

福田氏の博士論文では branched twist spin の補空間の基本群表示と Fox 微分を用いて定まる elementary ideal を精査することにより，1-knot の Alexander 多項式の特殊値の絶対値の違いで branched twist spin の位相型を区別することに成功した(Theorem 5.0.5)．この定理は福田氏の初期の研究で得られたものである．First elementary ideal の生成集合を精査して得られたもので，技術的な困難を克服する必要があるものの，判定に用いた Alexander 多項式の特殊値の branched twist spin における幾何学的な意味づけが不明であった．続く研究で，共役を法とした SL(2,C)既約 metabelian 表現の個数が先の Alexander 多項式の特殊値により表され、表現の個数を比較することにより同等の結果が得られることを証明した(Theorem 6.0.1)．この結果により，福田氏が着目した特殊値の幾何学的な位置づけがある程度明確となった．さらに福田氏は，Gordon による twist spun knot に関する Gruck twist の結果を branched twist spin に拡張し(Theorem 7.2.2)，その結果，補空間は同相であるが 2-knot として同型ではない branched twist spin が無限個存在することを示した(Corollary 7.2.3)．

Branched twist spin は図式により直感的に理解することが困難な対象であり，そのため基本群やその表現，あるいは elementary ideal などの代数的な手法を取り入れる必要があるが，学位論文から福田氏の代数的な高い技術を読み取ることができる．さらに第 7 章の Gordon の結果の拡張と関連する話題に関する記述から，貼り合わせや手術といった低次元トポロジーの技法を完全に習得していることを読み取ることができる．これらは福田氏が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．したがって，福田瑞季氏提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．